KUT, May 2015

量子力学と時間反転

高エネルギー加速器研究機構
筒 井　泉

内容

1. 古典力学の時間反転

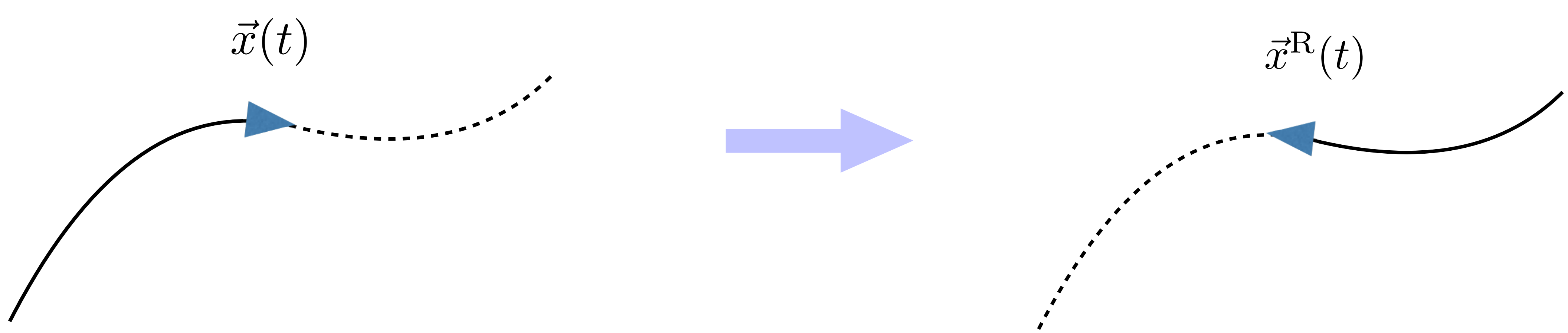
2. 量子力学の時間反転

3. 時間の順行と逆行の融合

I.　古典力学の時間反転

時間反転とは　$t \to -t$　時間の向きを逆にする

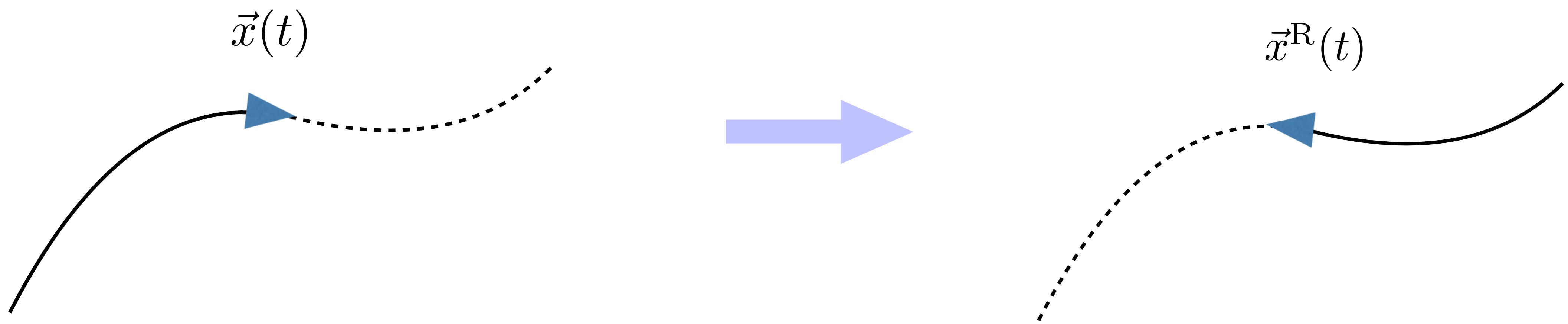
粒子の運動　　　時間反転した粒子の運動



$$\vec{x}^{\mathrm{R}}(t) := \vec{x}(-t)$$

時間反転した運動は実際に起こるだろうか？

粒子の運動　　　　　　時間反転した粒子の運動



ニュートンの運動方程式　　　ポテンシャル $V(\vec{x})$ の下での運動

$$\boxed{m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) = -\nabla V(\vec{x}(t))}$$

記号の説明

位置ベクトル $\vec{x} = (x, y, z)$

質量 m

ナブラ $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

ポテンシャル $V(\vec{x})$

$$\boxed{m \frac{d^2}{dt^2} \vec{x}(t) = -\nabla V(\vec{x}(t))}$$

加速度

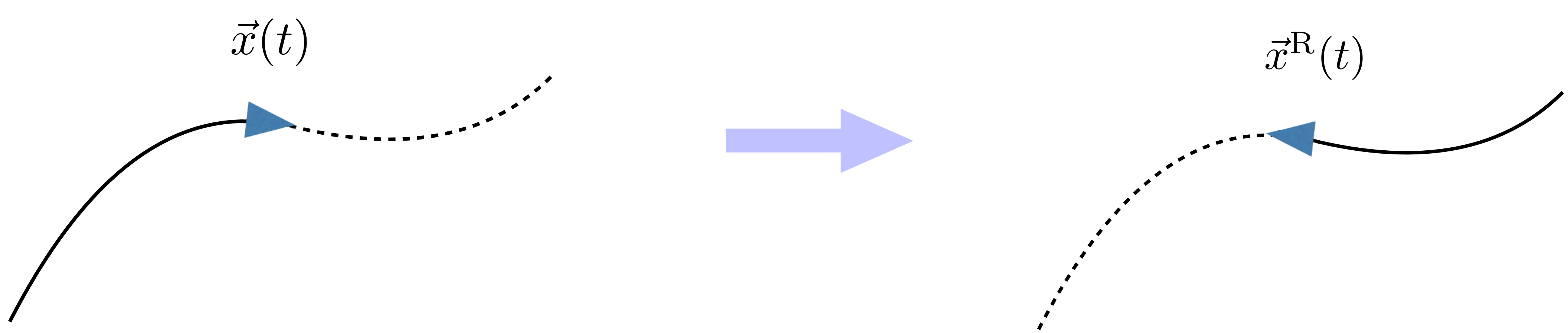
$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{x} = \left(\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 z}{dt^2} \right)$$

力

$$\vec{F} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

時間反転した運動は実際に起こるだろうか？

粒子の運動　　　　時間反転した粒子の運動

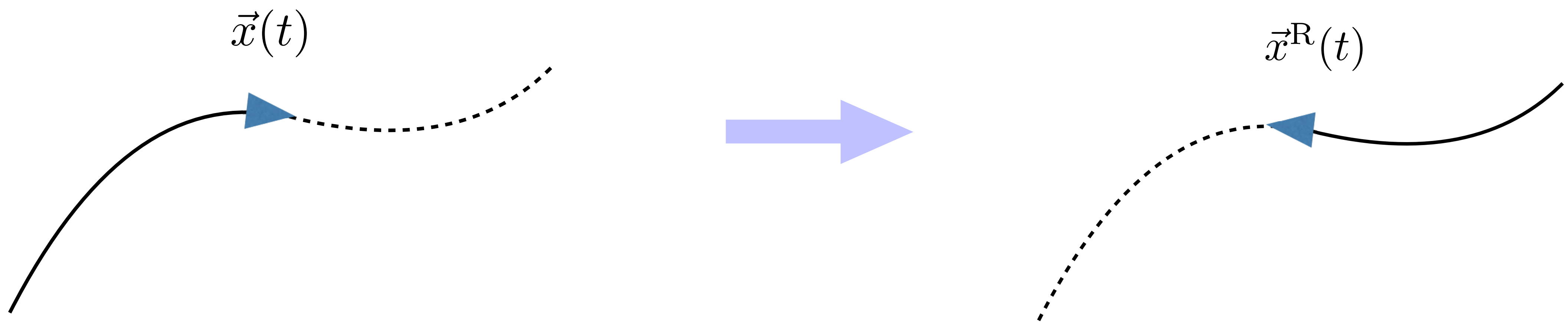


ニュートンの運動方程式　　　ポテンシャル $V(\vec{x})$ の下での運動

$$\boxed{m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) = -\nabla V(\vec{x}(t))}$$

時間反転した運動は実際に起こるだろうか？

粒子の運動　　　　時間反転した粒子の運動



ニュートンの運動方程式

$$\vec{x}^{\mathrm{R}}(t) := \vec{x}(-t)$$

$$\boxed{m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}^{\mathrm{R}}(t) = -\nabla V(\vec{x}^{\mathrm{R}}(t))}$$

?

ニュートンの運動方程式

$$\vec{x}^{\mathrm{R}}(t) := \vec{x}(-t)$$

$$t \to -t$$

$$\frac{d}{d(-t)} = -\frac{d}{dt}$$

$$\frac{d^2}{d(-t)^2} = \frac{d^2}{dt^2}$$

$$\boxed{m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}^{\mathrm{R}}(t) = -\nabla V(\vec{x}^{\mathrm{R}}(t))}$$

Yes!

時間反転した粒子の運動は実際に起こる

電磁場中の粒子の場合は？

ニュートンの運動方程式

電荷 q

$$\boxed{m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) = q\vec{E}(\vec{x}) + q\frac{d}{dt}\vec{x}(t)\times\vec{B}(\vec{x})}$$

電場

磁場

ローレンツ力

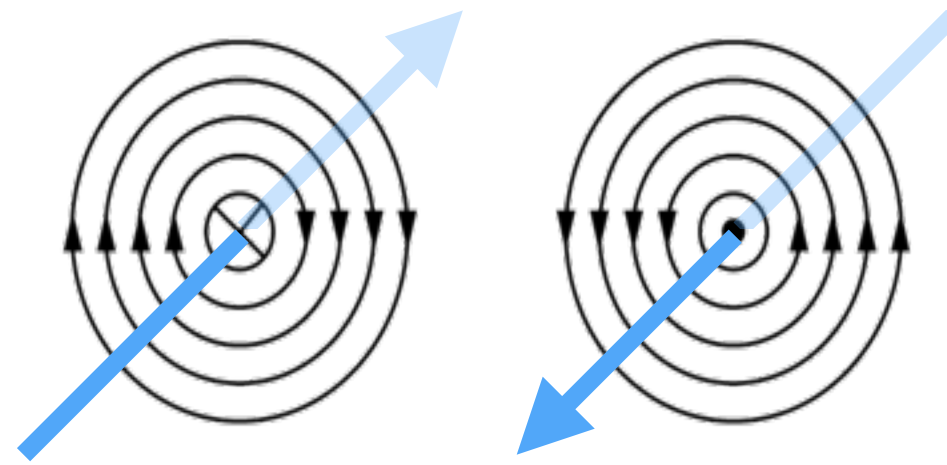
$$\frac{d}{d(-t)} = -\frac{d}{dt}$$ だから No?

時間反転の下で

$$t \to -t$$

$$\frac{d}{dt} \to \frac{d}{d(-t)} = -\frac{d}{dt}$$

$$\vec{B} \to -\vec{B}$$



磁場の向きは逆転

ニュートンの運動方程式

$$\boxed{m\frac{d^2}{dt^2}\underline{\vec{x}^{\mathrm{R}}(t)} = q\vec{E}(\underline{\vec{x}^{\mathrm{R}}(t)}) + q\frac{d}{dt}\vec{x}^{\mathrm{R}}(t) \times \vec{B}(\underline{\vec{x}^{\mathrm{R}}(t)})}$$

だから　Yes!

2. 量子力学の時間反転

時間反転した運動は量子力学でも起こるだろうか？

シュレーディンガー方程式

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{x})\right)\psi(\vec{x},t)}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ラプラシアン

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

プランク定数

$h =$ 6.62606957 × 10^{-34} m^2 kg / s

$$\frac{d}{dt} \to \frac{d}{d(-t)} = -\frac{d}{dt}$$

だから　No?

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{x})\right)\psi(\vec{x},t)}$$

複素共役もついでに取る

$$i \to -i$$

$$\frac{d}{dt} \to \frac{d}{d(-t)} = -\frac{d}{dt}$$

時間反転した波動関数

$$\psi^{\mathrm{R}}(\vec{x},t) := \psi^*(\vec{x},-t)$$

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\underline{\psi^{\mathrm{R}}(\vec{x},t)} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{x})\right)\underline{\psi^{\mathrm{R}}(\vec{x},t)}}$$

だから　Yes!

複素共役の意味

粒子の存在確率密度　　$|\psi^{\mathrm{R}}(\vec{x},t)|^2$　　影響しない

電磁場と相互作用する粒子

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla - i\frac{q}{\hbar}\vec{A}\right)^2 + q\phi\right]\psi}$$

ベクトルポテンシャル　　スカラーポテンシャル

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \qquad \vec{E} = -\nabla\phi - \partial\vec{A}/\partial t$$

ゲージ変換

$$\boxed{\phi \to \phi - \partial\chi/\partial t, \quad \vec{A} \to \vec{A} + \nabla\chi}$$

→ $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ $\vec{E} = -\nabla\phi - \partial\vec{A}/\partial t$ 不変

位相変換

$$\boxed{\psi(\vec{x},t) \to e^{iq\chi(\vec{x},t)/\hbar}\psi(\vec{x},t)}$$

電荷

シュレーディンガー方程式

→
$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla - i\frac{q}{\hbar}\vec{A}\right)^2 + q\phi\right]\psi}$$

不変

シュレーディンガー方程式で時間反転したとき

$$\psi^{\mathrm{R}}(\vec{x},t) := \psi^*(\vec{x},-t)$$

元の形と同じになるとすれば

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^{\mathrm{R}} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla - i\frac{q^{\mathrm{R}}}{\hbar}\vec{A}^{\mathrm{R}}\right)^2 + q^{\mathrm{R}}\phi^{\mathrm{R}}\right]\psi^{\mathrm{R}}}$$

(i) １つの解：

$$q^{\mathrm{R}} = q, \quad \vec{A}^{\mathrm{R}} = -\vec{A}, \quad \phi^{\mathrm{R}} = \phi$$

すなわち $\vec{A} \to -\vec{A}$ ⟹ $\vec{B} \to -\vec{B}$ に対応　$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^{\mathrm{R}} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla - i\frac{q^{\mathrm{R}}}{\hbar}\vec{A}^{\mathrm{R}}\right)^2 + q^{\mathrm{R}}\phi^{\mathrm{R}}\right]\psi^{\mathrm{R}}}$$

(ii) もう１つの解：

$$q^{\mathrm{R}} = -q, \quad \vec{A}^{\mathrm{R}} = \vec{A}, \quad \phi^{\mathrm{R}} = -\phi$$

すなわち電荷の符号を逆にし、かつ電場も反転させる

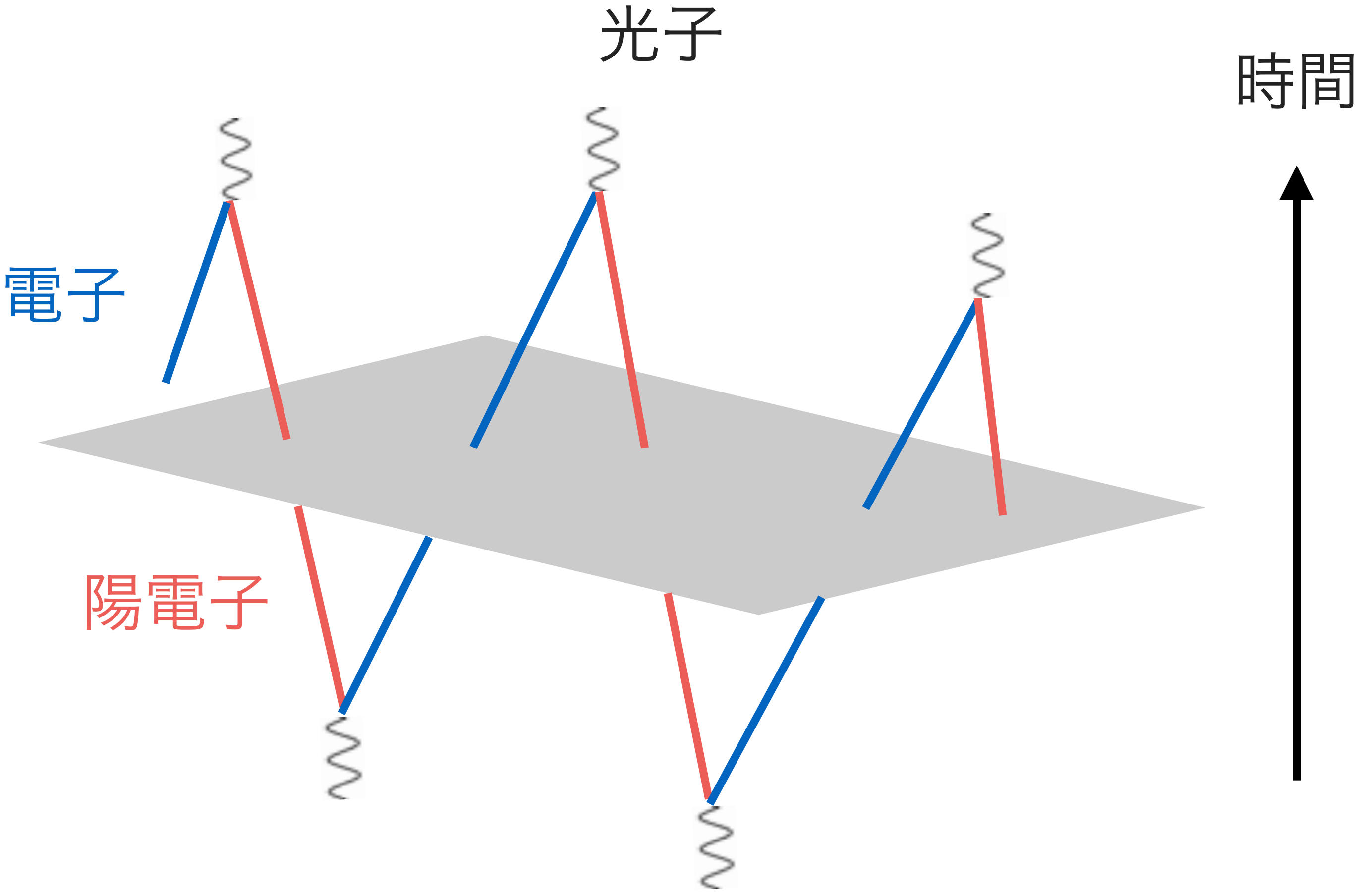
→ $\vec{E} \to -\vec{E}$ に対応　$\vec{E} = -\nabla\phi - \partial\vec{A}/\partial t$

時間反転による粒子・反粒子の入れ替え！

ファインマン

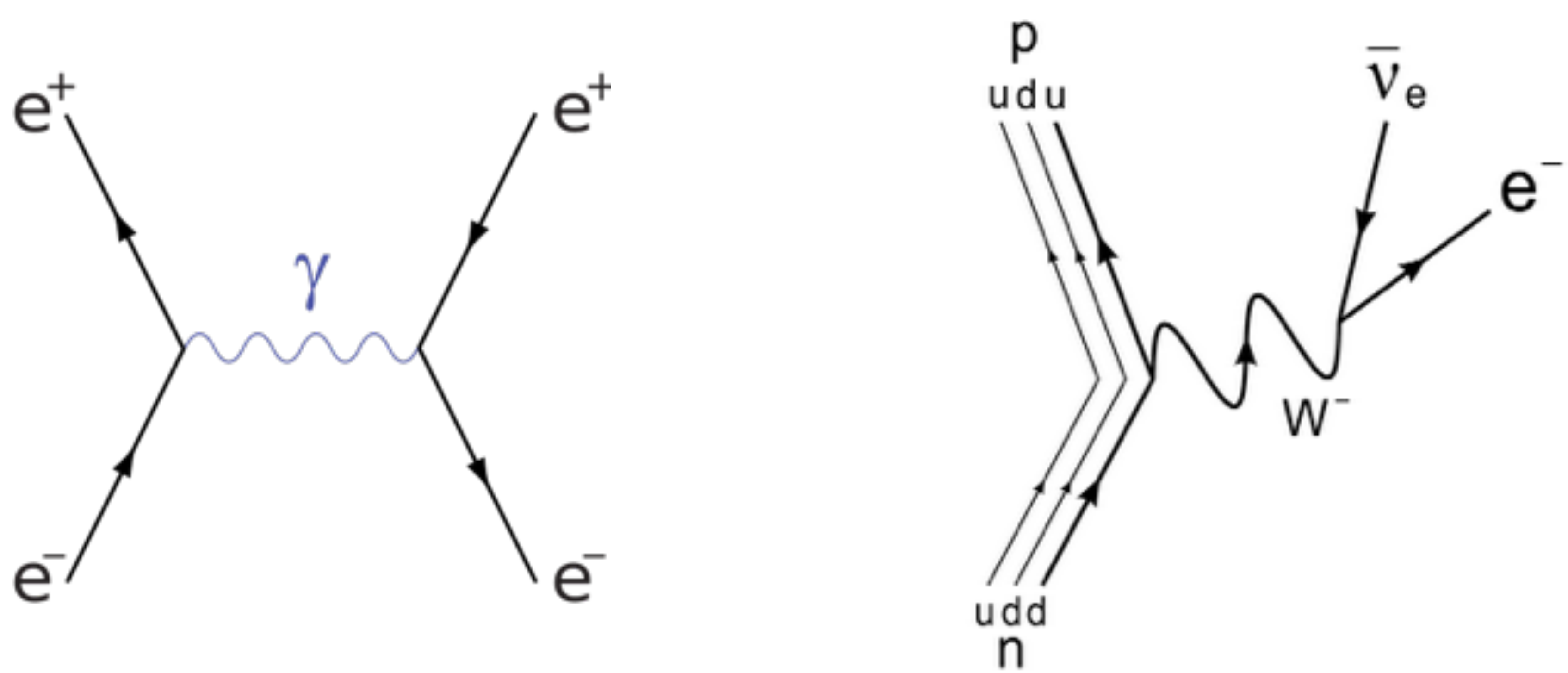
I received a telephone call one day at the graduate college at Princeton from Professor Wheeler, in which he said, "Feynman, I know why all electrons have the same charge and the same mass" "Why?" "Because, they are all the same electron!"

ノーベル賞講演 (1965)



ホイーラー

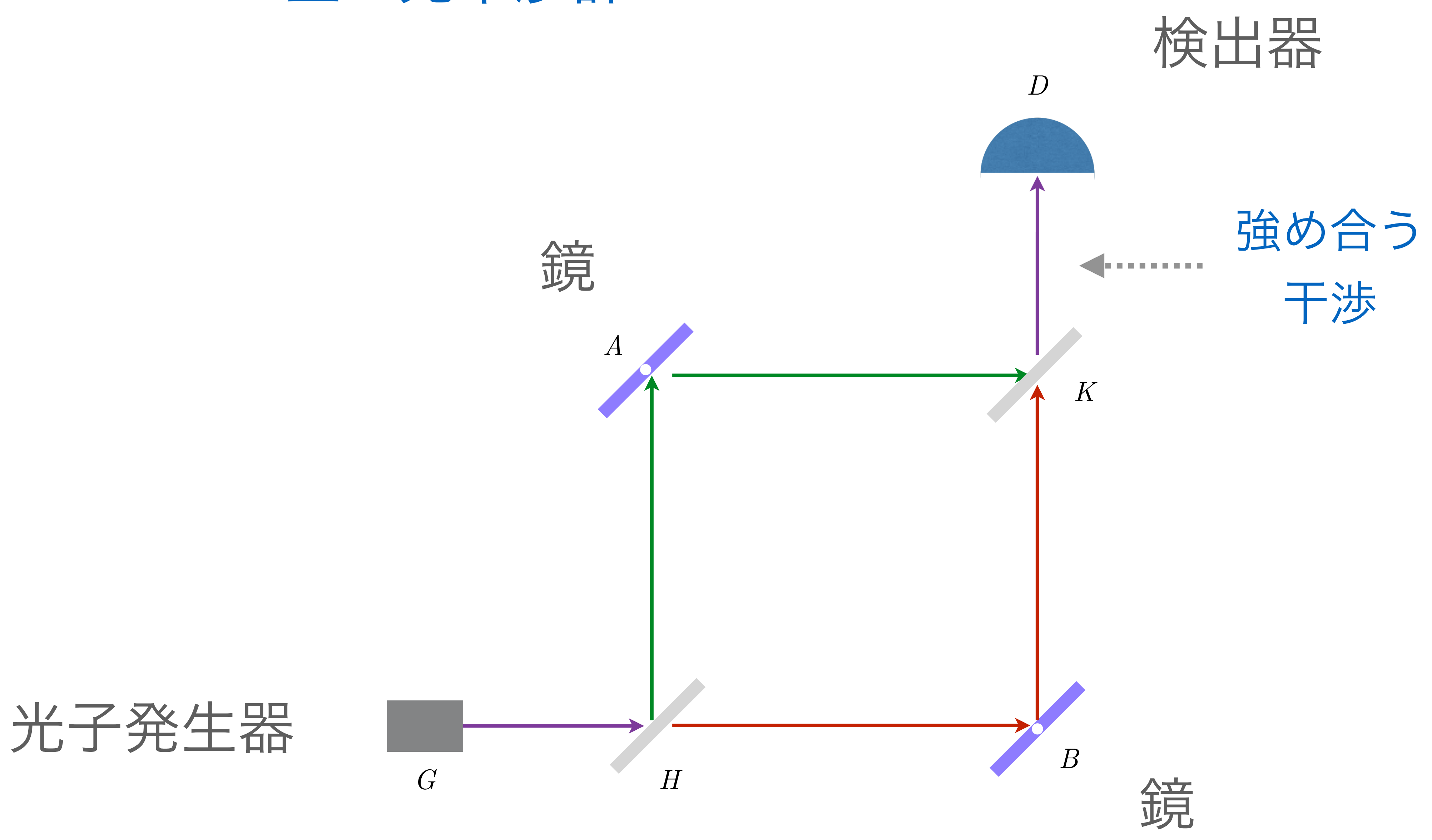
"But, Professor", I said, "there aren't as many positrons as electrons." "Well, maybe they are hidden in the protons or something", he said. I did not take the idea that all the electrons were the same one from him as seriously as I took the observation that positrons could simply be represented as electrons going from the future to the past in a back section of their world lines. That, I stole!



ファインマン図形

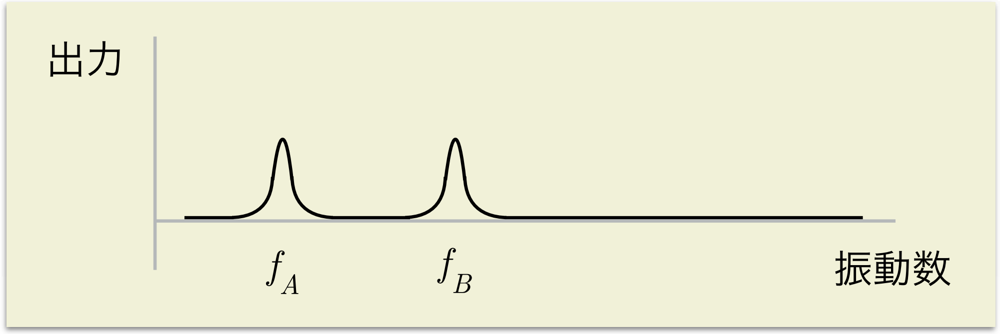
3. 時間の順行と逆行の融合

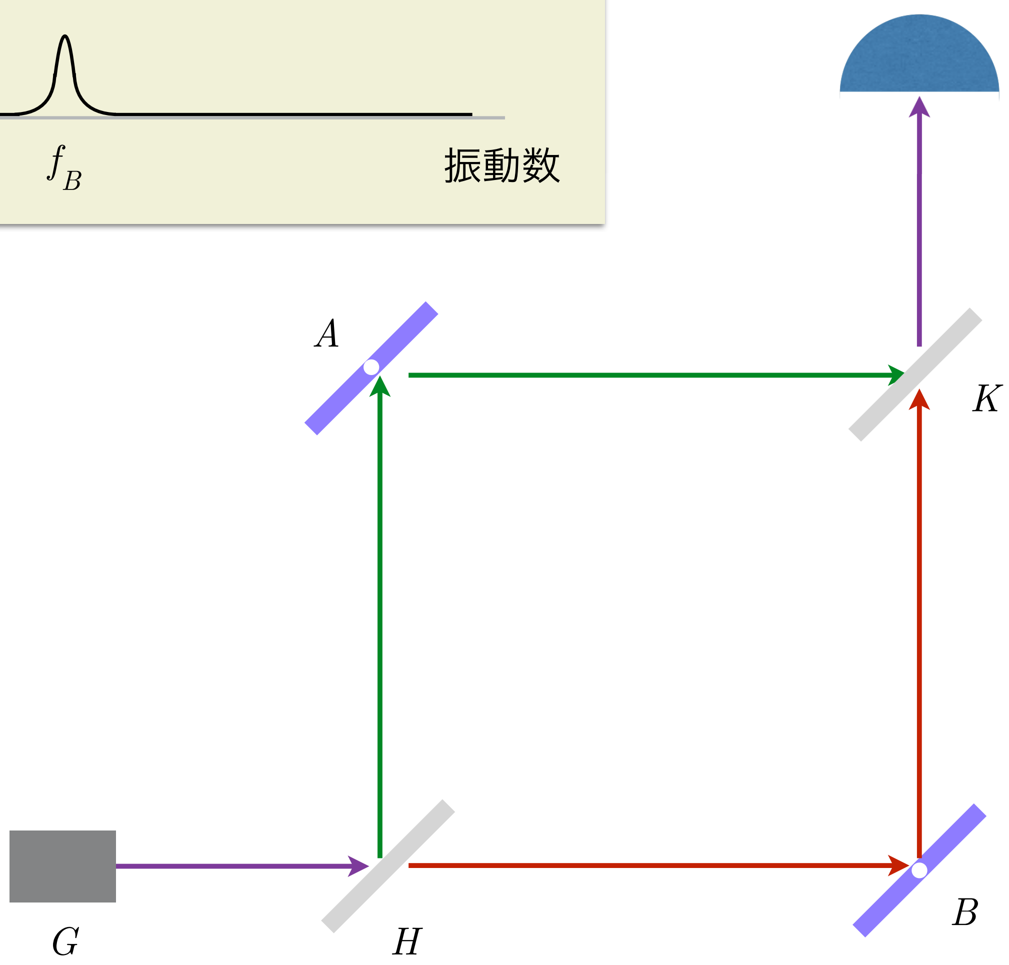
Mach-Zehnder型　光干渉計



鏡に固有な振動装置を付加

鏡 A ➡ 振動数 f_A　　鏡 B ➡ 振動数 f_B



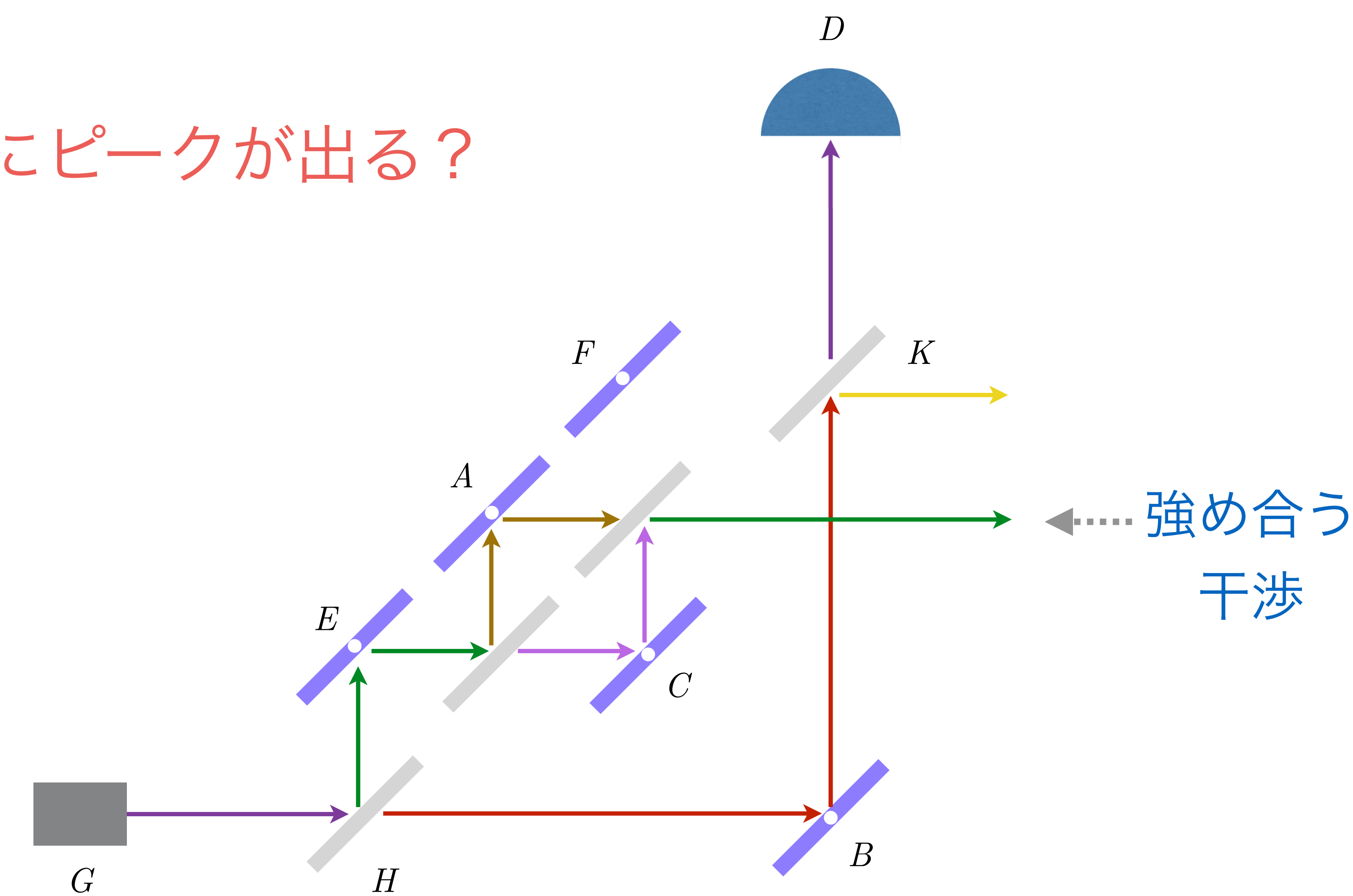


２重Mach-Zehnder型　光干渉計

A. Danan et al., ‘Asking Photons Where They Have Been’,

Phys. Rev. Lett. 111 (2013) 240402

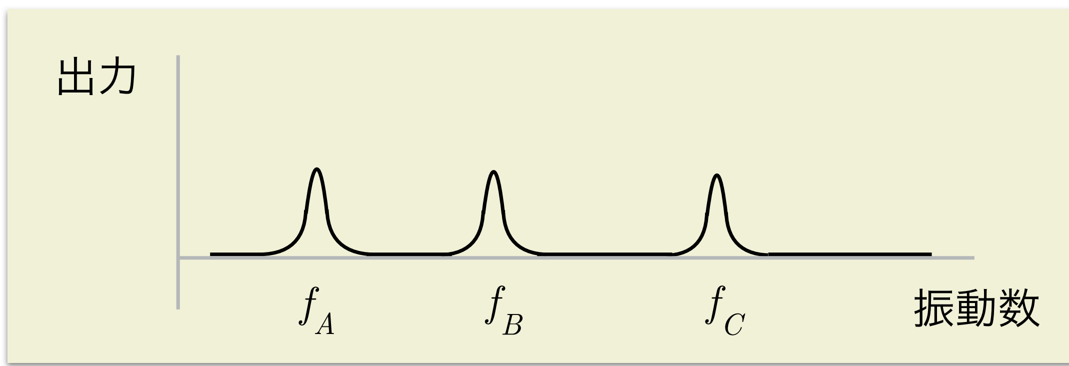
振動数はどこにピークが出る？

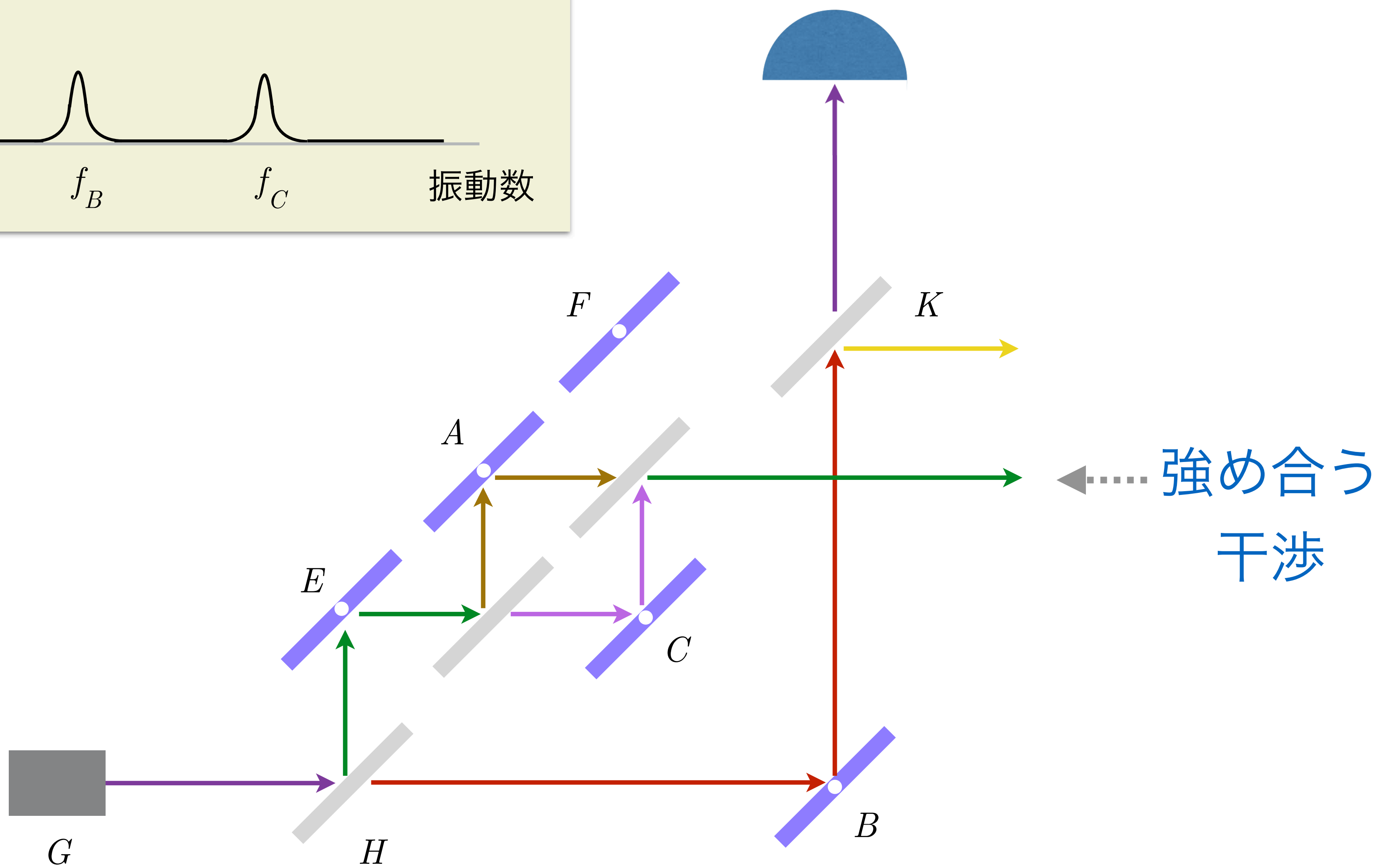


２重Mach-Zehnder型　光干渉計

A. Danan et al., ‘Asking Photons Where They Have Been’,

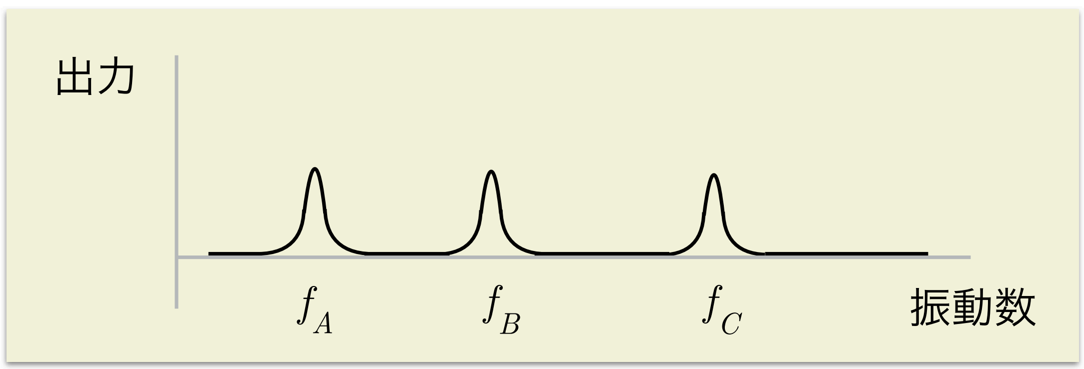
Phys. Rev. Lett. 111 (2013) 240402

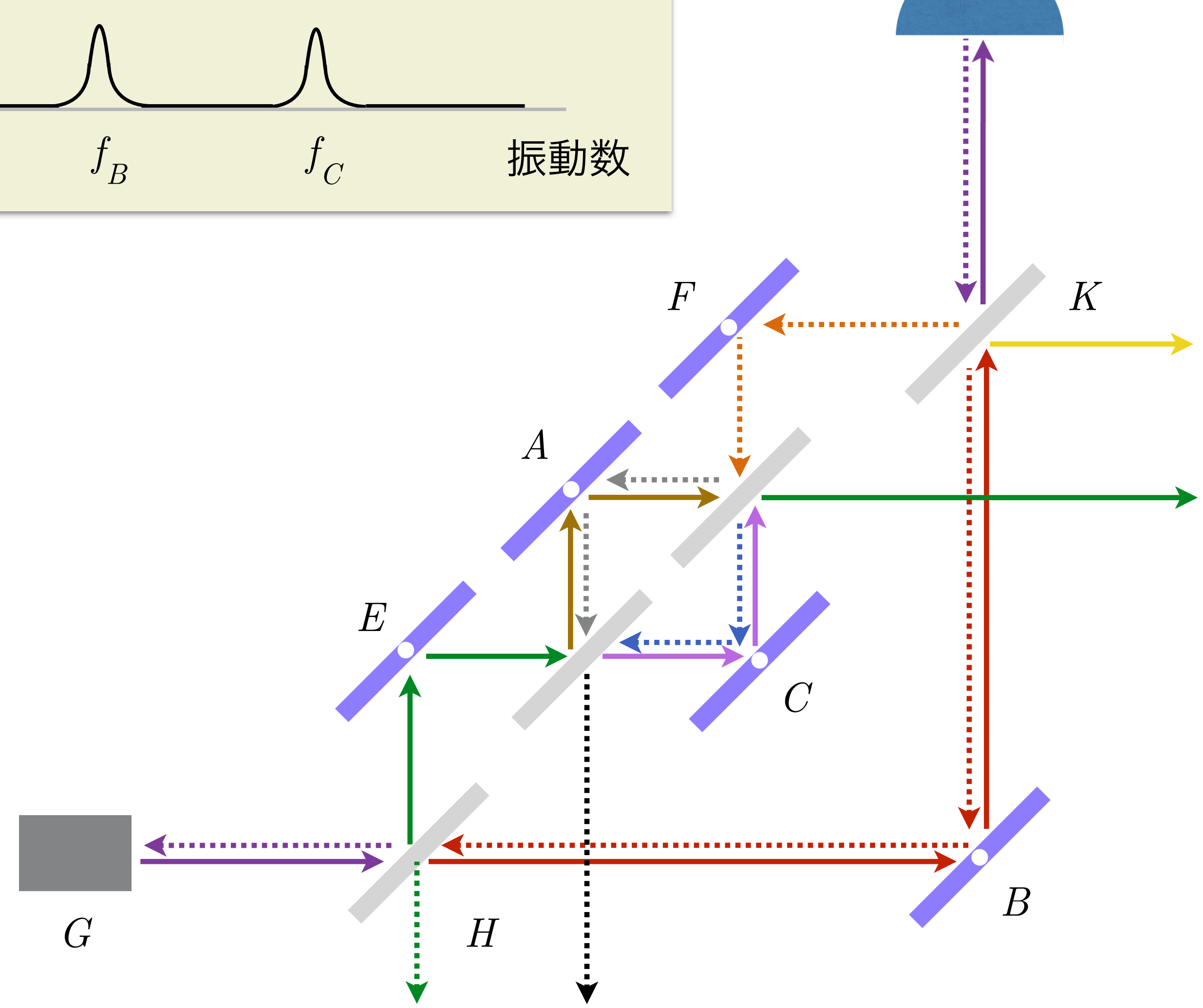




時間を遡ってみると …

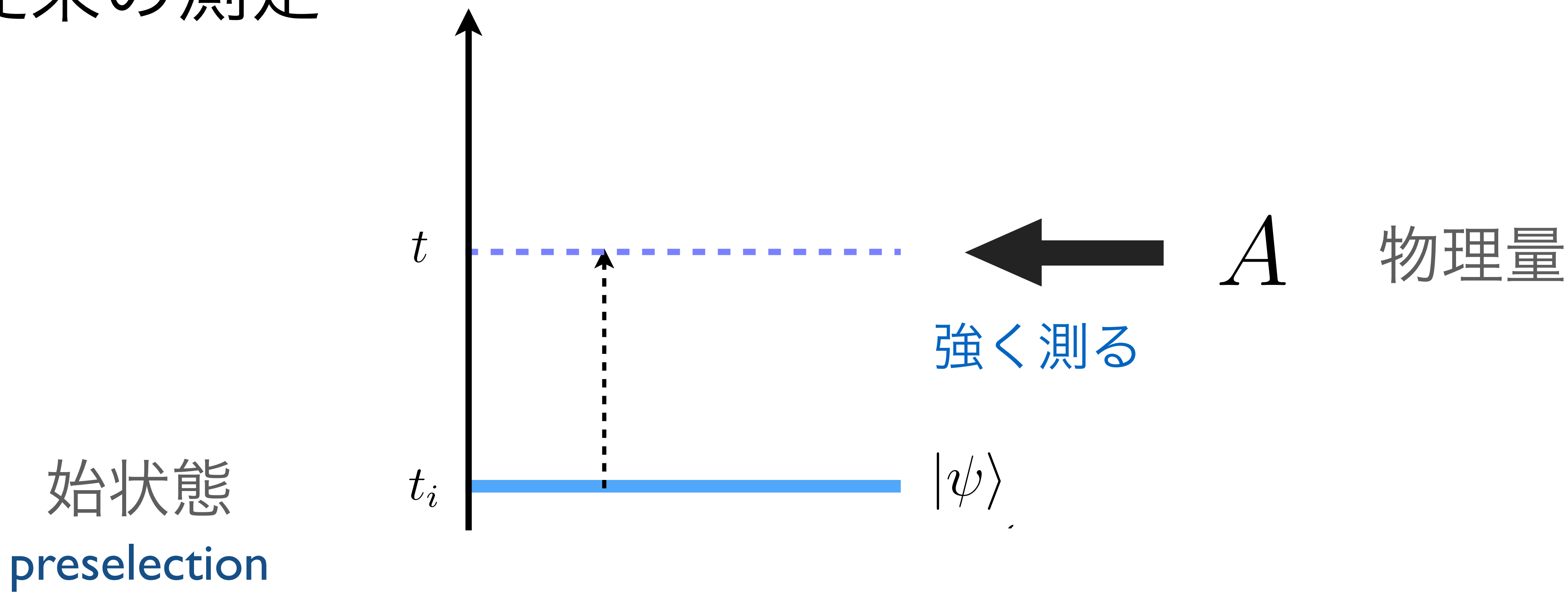
時間の順行と逆行の両方がある場合のみ、
振動数にピークが現れている！

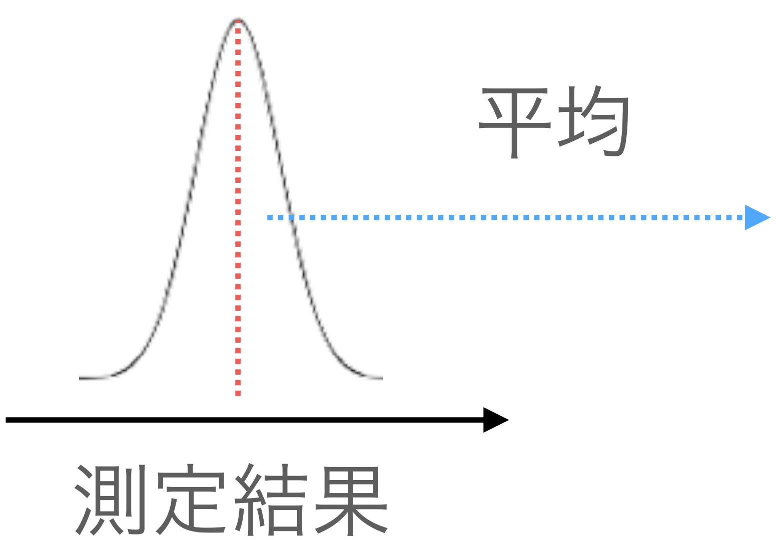




弱測定という考え方

従来の測定



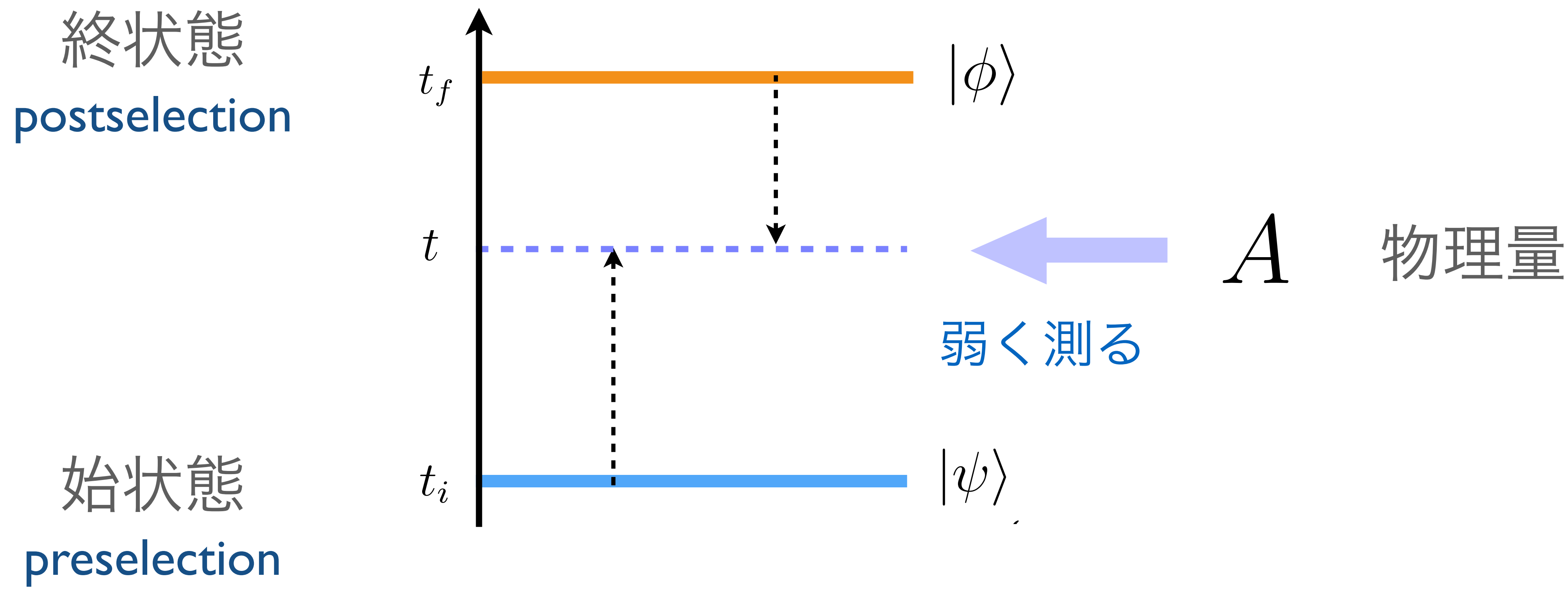


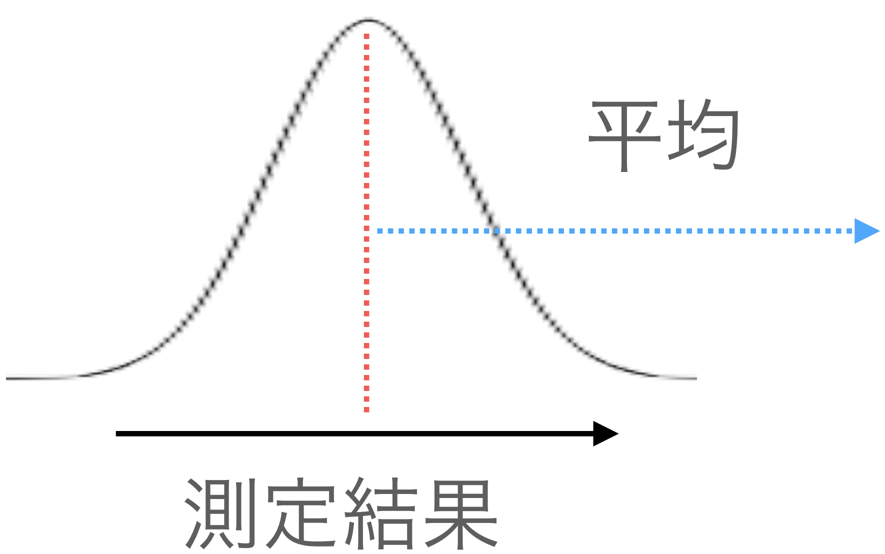
$$= \langle\psi|A|\psi\rangle$$

実数

期待値

弱測定





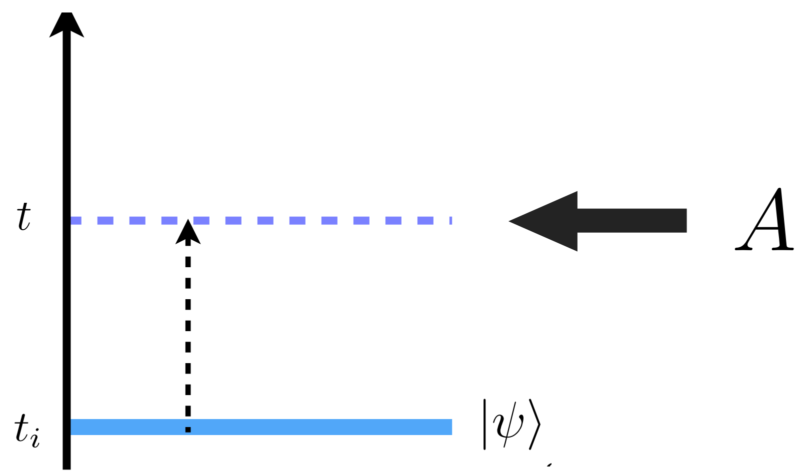
$$= \frac{\langle\phi|A|\psi\rangle}{\langle\phi|\psi\rangle}$$

弱値

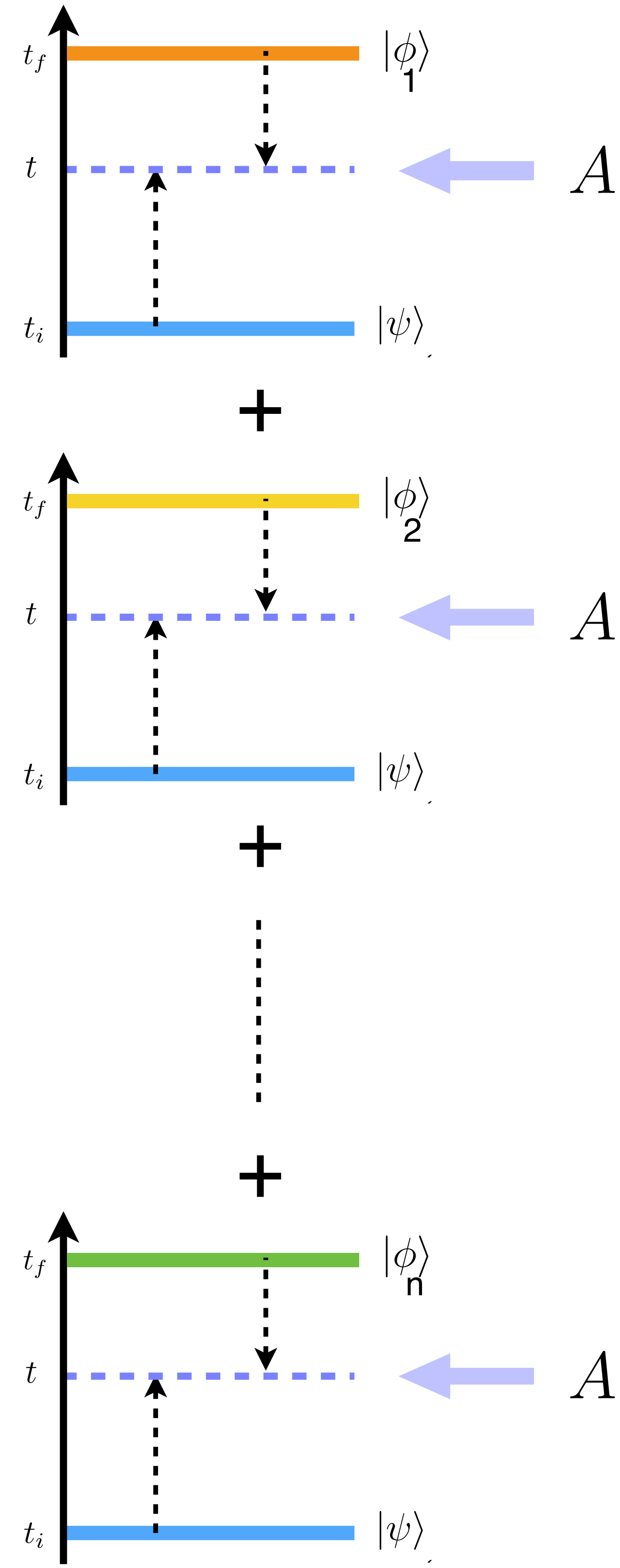
先の実験結果を
説明可能

両者の測定の関係

$$\langle\psi|A|\psi\rangle$$



=



$$\frac{\langle\phi_1|A|\psi\rangle}{\langle\phi_1|\psi\rangle}$$

$$\frac{\langle\phi_2|A|\psi\rangle}{\langle\phi_2|\psi\rangle}$$

$$\frac{\langle\phi_n|A|\psi\rangle}{\langle\phi_n|\psi\rangle}$$

期待値は弱値のさまざまな
終状態についての確率平均

$$\sum_k \underbrace{|\langle\phi_k|\psi\rangle|^2}_{\text{確率}} \frac{\langle\phi_k|A|\psi\rangle}{\langle\phi_k|\psi\rangle} = \langle\psi|A|\psi\rangle$$

まとめ：量子の世界の時間反転とは

- 位相：時間反転不変性を要請すると、古典力学とは別の解として粒子・反粒子の入れ換えの可能性が許される。（ → ホイーラーの考察）
- 弱値：時間の向きに順行する場合と逆行する場合の両者を考慮すべき量子干渉現象が存在。これを弱測定によって説明する新しい物理量が弱値。

量子力学はまだ普請中！

Thank you!